Groupe B

MATHÉMATIQUES

Notations :

Dans tout le problème, on désigne par :

$\mathfrak{M}_n$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées d'ordre n $(n > 1)$;

Δ_n le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n$ constitué par les matrices diagonales;

$\mathfrak{T}_n$ le sous-espace de $\mathfrak{M}_n$ constitué par les matrices à diagonale nulle (tous les éléments de la diagonale sont nuls).

Première partie

On suppose donnés une matrice D de Δ_n, d'éléments diagonaux a_i $(a_i \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ et le polynôme :

$$P = \prod_{i=1}^{n} (\omega_i - X) \qquad (\omega_i \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

1° Montrer que, pour qu'il existe une matrice A de $\mathfrak{T}_n$ telle que A + D admette P comme polynôme caractéristique, il est nécessaire que les a_i et les ω_i satisfassent la relation :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i .$$

On supposera désormais que D et P sont tels que cette relation soit satisfaite.

2° Montrer que l'on peut trouver $n - 1$ nombres complexes, notés b_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, *tous distincts*, tels que :

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} b_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i .$$

3° Un tel choix étant fait, on définit le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - X)$,

et on note C la matrice

$$C = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & b_2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & b_{n-1} & p_{n-1} \\ q_1 & \cdots & \cdots & q_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

où $p_i \in \mathbb{C}$, $q_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Montrer que le polynôme caractéristique R de C vérifie :

$$R(x) = -Q(x) \left(x - a_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p_k q_k}{x - b_k} \right).$$

4° Donner la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ en éléments simples.

5° En déduire que l'on peut choisir les p_i et les q_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ de façon telle que C admette P comme polynôme caractéristique.

.../...

ENS ULM & SEVRES GROUPE B 1977 ×9×

6° Montrer, par récurrence sur n, que, si la condition (1) est satisfaite, il existe au moins une matrice A de $\mathcal{F}_n$ telle que A + D admette P comme polynôme caractéristique.

7° Cette matrice A est-elle unique?

8° Quels résultats obtiendrait-on si l'on supposait les éléments de D et les racines de P *réels* et si l'on cherchait A parmi les matrices de $\mathcal{F}_n$ à coefficients *réels*?

Deuxième partie

On suppose maintenant donnés une matrice D de Δ_n, dont les éléments diagonaux sont les nombres *réels* a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n} (\omega_i - X)$, $\omega_i \in \mathbb{R}\ (1 \leqslant i \leqslant n)$, la relation (1) étant toujours supposée satisfaite.

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{F}_n$, à coefficients *réels*, *symétrique*, et telle que A + D admette P comme polynôme caractéristique.

On suppose, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'on a :

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & a_i \geqslant a_{i+1} \\ \text{et}\ (4) & \omega_i \geqslant \omega_{i+1} \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Pour p entier au moins égal à 1, on note Σ_p l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^p$, dont les composantes $x_1, \ldots, x_p$ (dans la base canonique) vérifient :

$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_p$; sur Σ_p on définit la relation d'ordre partiel :

$$(5)\quad (x \prec y) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{q} y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant q \leqslant p-1 \end{array} \right)$$

Alors (3) se traduit par $a \in \Sigma_n$, (4) par $\omega \in \Sigma_n$, et l'on se propose de démontrer que la condition nécessaire et suffisante cherchée est

$$(6) \qquad a \prec \omega.$$

A. *Condition nécessaire.*

1° Soit E_n un espace euclidien de dimension n, muni d'une base orthonormée $(\vec{e_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

On désigne par $\vec{x} . \vec{y}$ le produit scalaire de deux éléments de E_n.

Soit u un endomorphisme *symétrique* de E_n ; on note $\vec{v_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un système orthonormé de vecteurs propres de u, et λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les valeurs propres correspondantes; on suppose que les $\vec{v_i}$ ont été indexés de façon telle que

$$\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

Montrer que, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$(7) \qquad u(\vec{e_j}) . \vec{e_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{e_j} . \vec{v_i})^2$$

puis que

$$(8) \quad u(\vec{e_j}) . \vec{e_j} \leqslant \lambda_q + \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i - \lambda_q)(\vec{e_j} . \vec{v_i})^2 \qquad \begin{array}{l} \text{pour} \quad 1 \leqslant q \leqslant n \\ \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}$$

et enfin que

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{q} (u(\vec{e_j}) . \vec{e_j}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \qquad \begin{array}{l} \text{pour} \quad 1 \leqslant q \leqslant n \\ \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}$$

2° En déduire que, si A est une matrice de $\mathcal{F}_n$, réelle et symétrique, telle que A + D admette P comme polynôme caractéristique, la condition (6) est vérifiée.

.../...

XIOX

B. *Condition suffisante.*

Soient a et b deux éléments de Σ_n ($n \geqslant 2$), tels que

$$a \prec b \tag{10}$$

Dans les deux questions qui suivent, on se propose de montrer qu'il existe au moins un élément c de Σ_{n-1} tel que :

$$\begin{cases} b_i \geqslant c_i \geqslant b_{i+1} & \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ a^{(n-1)} \prec c \end{cases} \tag{11}$$

où $a^{(n-1)}$ désigne l'élément de Σ_{n-1} dont les composantes $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont les $(n-1)$ premières composantes de a.

1° Traiter le cas $n = 2$.

2° On suppose $n \geqslant 3$. Soit F l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont les composantes $x_1, \ldots, x_{n-1}$, vérifient :

$$\begin{cases} (a) & b_i \geqslant x_i \geqslant b_{i+1} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ (b) & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-2 \end{cases} \tag{12}$$

a. Montrer que F est une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^{n-1}$, et que, si $y \in F$ et $z \in F$, alors tout le segment d'extrémités y et z est contenu dans F.

b. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i .$$

Soient $\quad m^* = \sup_{x \in F} \varphi(x) \quad$ et $\quad m_* = \inf_{x \in F} \varphi(x)$

Montrer qu'il existe y et z, éléments de F, tels que :

$$m^* = \varphi(y) \quad \text{et} \quad m_* = \varphi(z)$$

c. Calculer m^* en fonction des b_i et montrer que :

$$m^* \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i . \tag{13}$$

d. Soient $z_1, \ldots, z_{n-1}$ les coordonnées d'un point z de F tel que $\varphi(z) = m_*$.

Montrer que l'on a :

$$z_{n-1} = b_n \quad , \tag{14 a}$$

en plus des inégalités provenant de (12), en particulier :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} z_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-2. \tag{14 b}$$

On suppose d'abord que toutes les inégalités (14 *b*) sont strictes.

Montrer que la définition de z impose que :

$$z_i = b_{i+1} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-2 \tag{15}$$

Calculer alors m_* en fonction des b_i et montrer que :

$$m_* \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i . \tag{16}$$

Supposant maintenant que toutes les inégalités ne sont pas strictes dans (14 *b*), on définit r comme le plus grand entier, compris entre 1 et $n-2$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = \sum_{i=1}^{r} z_i . \tag{17}$$

Montrer que, si $r < n-2$, on a :

$$z_k = b_{k+1} \qquad \text{pour} \qquad r+1 \leqslant k \leqslant n-2$$

Calculer alors m_* et montrer que l'inégalité (16) est encore vérifiée.

Obtenir le même résultat pour le cas où $r = n - 2$.

e. Des résultats obtenus précédemment, déduire l'existence d'un élément c de Σ_{n-1} qui satisfasse (11).

3° Soient maintenant des nombres réels α_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ tels que

$$\omega_i \geqslant \alpha_i \geqslant \omega_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{18}$$

On se propose de montrer qu'il existe une matrice S de $\mathfrak{M}_n$, réelle et symétrique, de la forme :

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & \alpha_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & p_{n-1} \\ p_1 & \cdots & \cdots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix}$$

qui admette P comme polynôme caractéristique.

Soit M l'ensemble des entiers k tels que $(k = 1)$ ou $(1 < k < n$ et $\alpha_k < \alpha_{k-1})$.

Soit $M' = M \cup \{ n \}$.

a. Calculer p_n et montrer que l'on peut l'écrire sous la forme

$$p_n = \sum_{k \in M'} \omega_k - \sum_{k \in M} \alpha_k . \tag{19}$$

b. Soient :

$$\tilde{P} = \prod_{k \in M'} (\omega_k - X) \quad \text{et} \quad \tilde{Q} = \prod_{k \in M} (\alpha_k - X).$$

Étudier le signe des quantités $\dfrac{\tilde{P}(\alpha_k)}{\tilde{Q}'(\alpha_k)}$ pour $k \in M$.

c. En s'inspirant de la méthode suivie dans la première partie, déterminer des nombres réels p_k tels que la matrice S admette P comme polynôme caractéristique.

4° Utilisant les résultats obtenus dans les deux questions précédentes, démontrer par récurrence sur n que, si la condition (6) est satisfaite, on peut trouver une matrice A, réelle et symétrique, à coefficients diagonaux nuls, telle que A + D admette P comme polynôme caractéristique.

X 112 X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail